УДК 621.515

Математическая модель регенеративного теплоутилизатора

Соболь Е.В. john-stud-spb@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий,
факультет КТ и К, кафедра кондиционирования воздуха

В данной статье описана математическая модель регенеративного теплоутилизатора: получены зависимости для нахождения коэффициента теплоотдачи, дифференциальные уравнения для расчета процессов тепломассопереноса. Представлено описание программного модуля для решения уравнений и получения коэффициентов регенерации и аккумуляции.

Ключевые слова: коэффициент теплоотдачи, процессы тепломассопереноса, программный модуль.

В последнее время рост стоимости энергетических ресурсов и повышение требований к качеству жизни существенно обострили проблему сокращения затрат на отопление и вентиляцию бытовых и производственных помещений. Одним из решений данной задачи является использование локальных систем вентиляции с утилизацией теплоты удаляемого из помещения воздуха. Важная роль в таких системах отведена регенеративному теплоутилизатору.

На рис. 1 изображен регенеративный теплоутилизатор с указанием направления движения теплоносителя. Движение воздуха попеременно осуществляется в обоих направлениях. Во всех каналах регенератора происходят одинаковые процессы теплообмена, поэтому можно рассматривать единичный канал (рис. 2). Процесс теплообмена в канале насадки является установившимся. Температура поверхности канала изменяется по длине насадки и по времени.

Примем следующие допущения:

- регенератор теплоизолирован, поэтому потери тепла из насадки в окружающую среду отсутствуют;
- теплообмен в насадке происходит без конденсации паров влажного воздуха;
- теплофизические свойства регенератора и воздуха постоянны;
- время прохождения воздуха через регенератор намного меньше, чем время цикла.

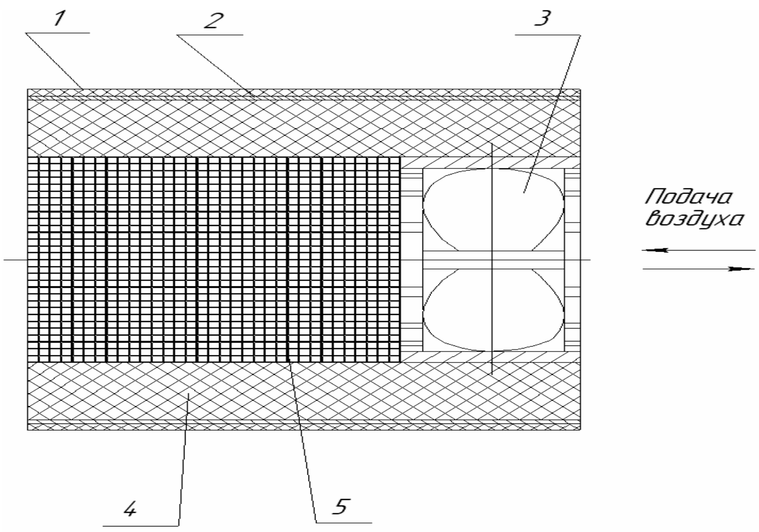

Рис. 1. Конструкция стационарного регенеративного теплоутилизатора
(1 — корпус регенератора; 2 — изоляционная фольга; 3 — вентилятор;
4 — теплоизоляция; 5 — регенеративная насадка).

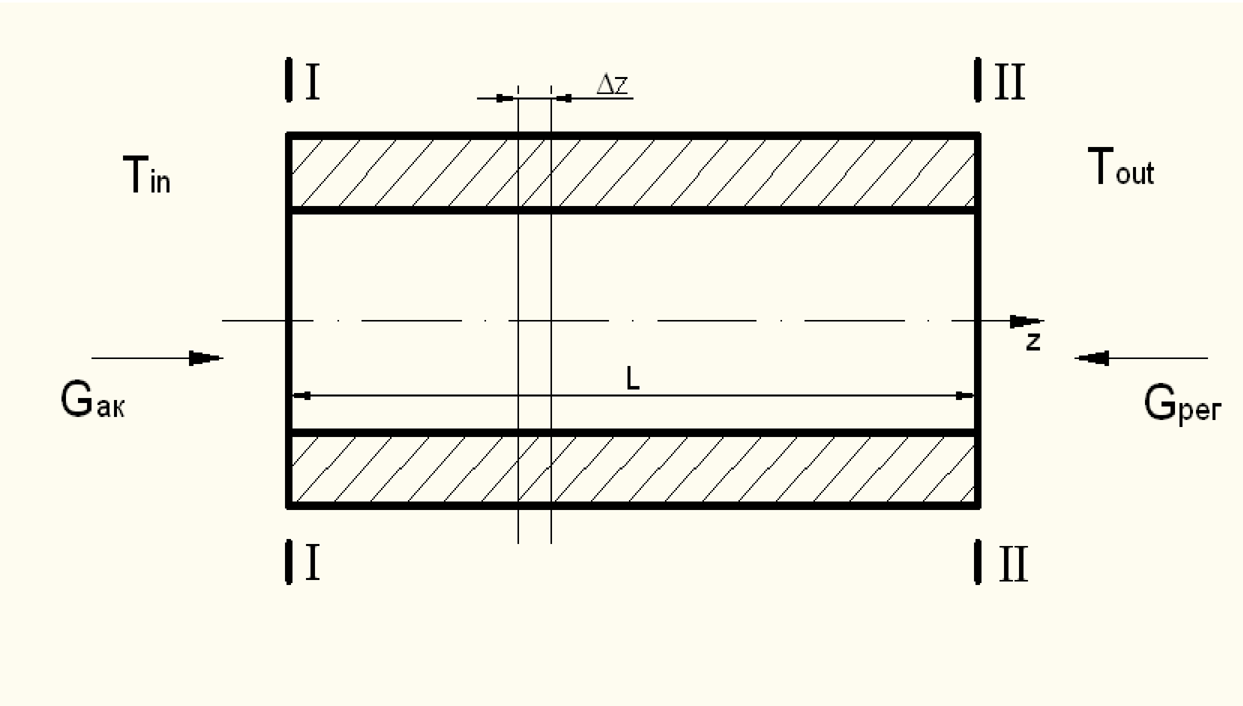

Рис. 2. Сечение канала насадки регенеративного теплоутилизатора.

На рис. 2 изображен единичный канал насадки. Здесь: I и II — торцевые сечения насадки; $G_{ак}$ — расход воздуха на этапе аккумуляции (передача теплоты удаляемого воздуха насадке); $G_{рег}$ — расход воздуха на этапе регенерации (передача теплоты от насадки к приточному воздуху); T_{in} — температура большего потенциала; T_{out} — температура меньшего потенциала; L — длина насадки. Расход воздуха через единичный канал насадки определяется как общий расход воздуха, отнесенный к общему количеству каналов насадки. Толщина стенки канала равна половине стенки между смежными каналами.

На рис. 3 приведены зависимости изменения температуры поступаемого и удаляемого воздуха в торцевых сечениях канала I и II от времени [2]. Здесь $\tau_{ак}$ — время процесса аккумуляции теплоты насадкой; $\tau_{рег}$ — время процесса отдачи теплоты от насадки воздуху.

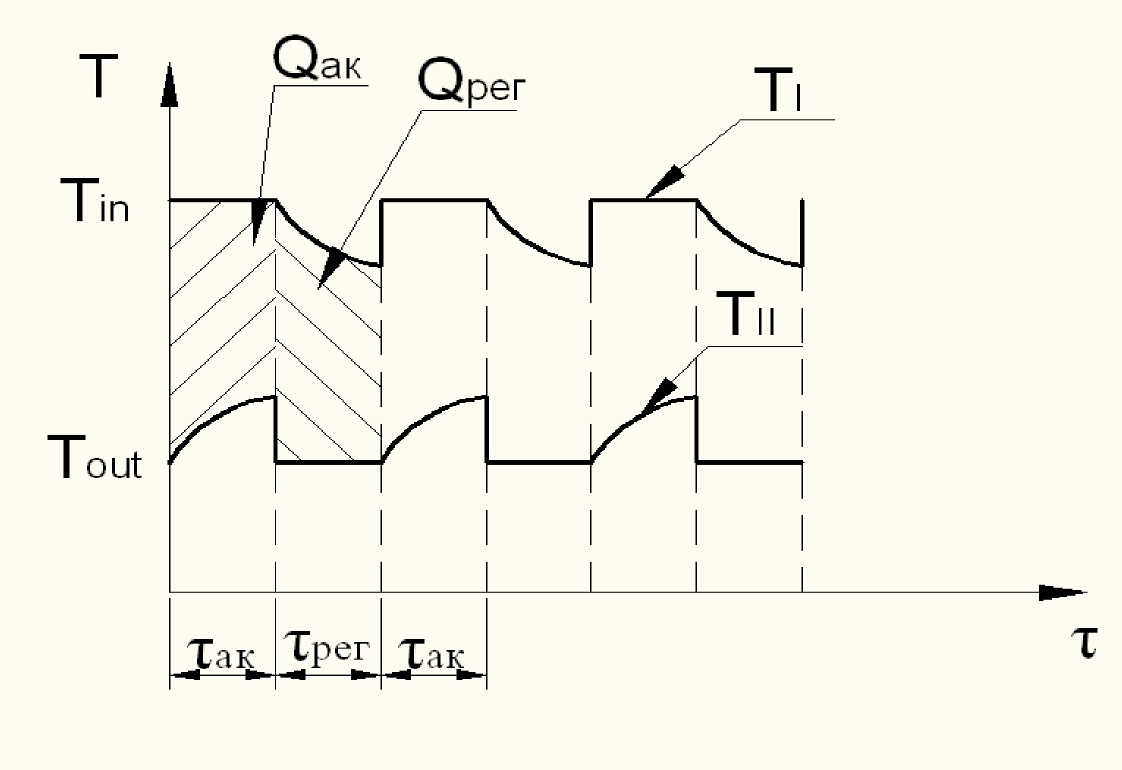

Рис. 3. Изменение температуры поступаемого и удаляемого воздуха в торцевых сечениях канала в зависимости от времени.

Рассмотрим изменение температуры воздуха в торцевом сечении канала I за один период цикла. За период цикла будем принимать: $\tau_ц = \tau_{ак} + \tau_{рег}$. За время первого полупериода $\tau_{ак}$ температура в канале сечения I постоянна и равна внутренней температуре помещения. Через полупериод происходит изменение направления движения воздуха и в течение времени $\tau_{рег}$ температура в сечении изменяется по кривой, представленной на графике. После этого температура воздуха скачком изменяется на первоначальное состояние. Далее циклы повторяются.

Подобным образом происходит изменение температуры воздуха в торцевом сечении канала II.

Площади заштрихованных участков диаграммы пропорциональны теплоте аккумулированной насадкой — $Q_{ак}$ и регенерированной теплоте — $Q_{рег}$.

$$Q_{ак} = Q_{рег}\,; \qquad (1)$$

$$Q_{\text{рег}} = \int_0^{\tau_{\text{рег}}} T_{\text{I}} d\tau - T_{\text{out}} \tau_{\text{рег}}\ ; \qquad (2)$$

$$Q_{\text{ак}} = T_{\text{in}} \tau_{\text{ак}} - \int_0^{\tau_{\text{ак}}} T_{\text{II}} d\tau\ . \qquad (3)$$

Рассмотрим выделенный элемент насадки длиной Δz (Рис. 4). Для участка канала Δz составим уравнение теплового баланса для воздуха за время Δτ.

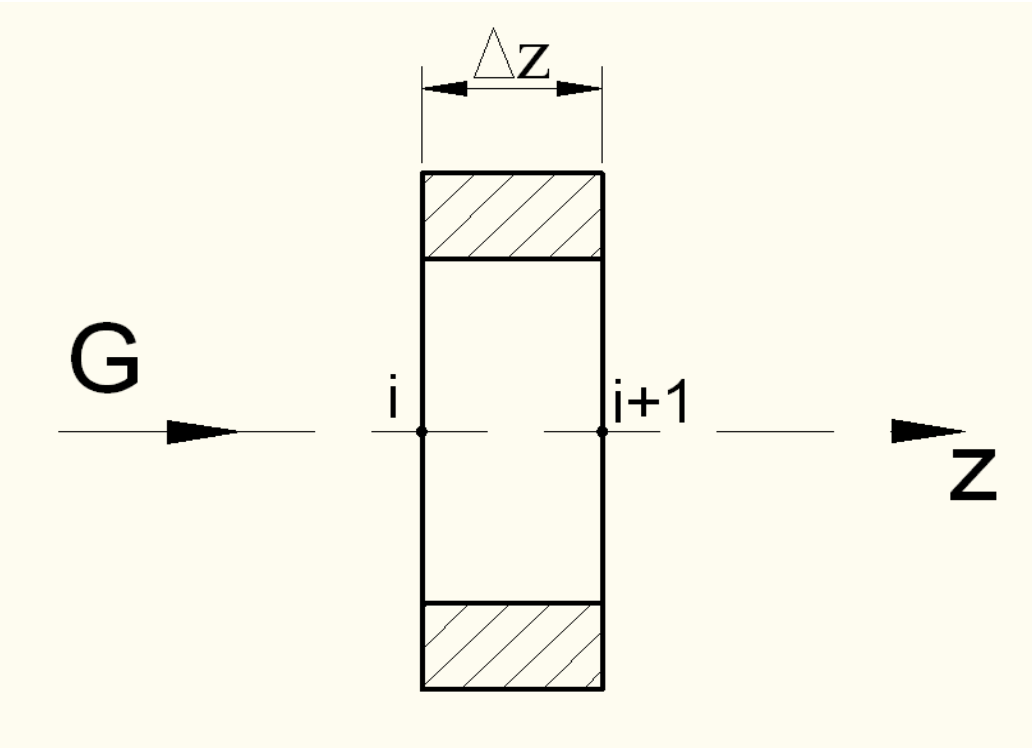

Рис. 4. Выделенный участок канала длиной Δz.

Количество теплоты в выделенном элементарном объеме в начальный (предыдущий) момент времени:

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left(T_{B(i)}^{(k-1)} + T_{B(i+1)}^{(k-1)}\right) c_B \rho_B s \Delta z\ . \qquad (4)$$

Количество теплоты в элементарном объеме через время $\Delta\tau$:

$$Q_2 = \frac{1}{2}\left(T_{B(i)}^{(k)} + T_{B(i+1)}^{(k)}\right) c_B \rho_B s \Delta z\ . \qquad (5)$$

Теплота воздушного потока, поступившая в контрольный объем:

$$Q_3 = G T_{B(i)}^{(k)} c_B \Delta\tau\ . \qquad (6)$$

Теплота воздушного потока, вышедшего из контрольного объема:

$$Q_4 = GT_{B(i+1)}^{(k)} c_B \Delta\tau \quad (7)$$

Количество теплоты участвующее в теплообмене с насадкой:

$$Q_5 = p\alpha\Delta z\Delta\tau \left(\frac{T_{B(i)}^{(k)} + T_{B(i+1)}^{(k)}}{2} - \frac{T_{H(i)}^{(k)} + T_{H(i+1)}^{(k)}}{2} \right). \quad (8)$$

Здесь: T_B — температура воздуха; T_H — температура насадки; s — площадь проходного сечения канала; ρ_B — плотность воздуха; p — периметр проходного сечения канала; α — коэффициент теплоотдачи.

Примем, что положительными являются процессы, приводящие к уменьшению теплосодержания контрольного объема. Тогда уравнение теплового баланса имеет вид

$$\begin{aligned} & Q_4 - Q_3 + Q_5 = Q_1 - Q_2; \\ & \left(T_{B(i+1)}^{(k)} - T_{B(i)}^{(k)}\right) Gc_B \Delta\tau + \left(T_{B(i+1/2)}^{(k)} - T_{H(i+1/2)}^{(k)}\right) p\alpha\Delta z\Delta\tau = \\ & = \left(T_{B(i+1/2)}^{(k)} - T_{B(i+1/2)}^{(k-1)}\right) c_B \rho_B s \Delta z \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $\Delta z \to 0$ и $\Delta\tau \to 0$, тогда в любом сечении воздушного канала процесс тепломассопереноса описывается дифференциальным уравнением

$$Gc_B \frac{\partial T_B}{\partial z} + c_B \rho_B s \frac{\partial T_B}{\partial \tau} + p\alpha\left(T_B - T_H\right) = 0. \quad (10)$$

Для решения дифференциального уравнения (10) необходимо задать краевые условия.

В качестве граничного условия зададим температуру воздуха на входе в канал

$$T_{B(z=0)} = \begin{cases} T_{in} \; if \; G = G_{ак} \\ T_{out} \; if \; G = G_{рег} \end{cases}. \quad (11)$$

Так как при номинальном режиме работы регенератора тепловые процессы имеют циклический установившийся характер и не зависят от исходного теплового состояния, начальные условия могут задаваться в произвольной форме.

Для определенности примем, что при $\tau = 0$ температура воздуха в канале линейно изменяется от T_{in} до T_{out}, тогда начальное условие имеет вид

$$T_{B(\tau=0)} = T_{in} - \frac{\left(T_{in} - T_{out}\right) z}{L}. \quad (12)$$

Составим уравнение тепломассопереноса для элементарного объема насадки.

Количество теплоты в элементарном объеме насадки в начальный (предыдущий) момент времени

$$Q_6 = \frac{1}{2}\left(T_{H(i)}^{(k-1)} + T_{H(i+1)}^{(k-1)}\right) c_H \rho_H s_H \Delta z \quad (13)$$

Количество теплоты в элементарном объеме насадки через время $\Delta\tau$

$$Q_7 = \frac{1}{2}\left(T_{H(i)}^{(k)} + T_{H(i+1)}^{(k)}\right) c_H \rho_H s_H \Delta z \quad (14)$$

Теплота, поступившая в элементарный объем насадки вследствие теплопроводности

$$Q_8 = \lambda_H s_H \Delta\tau \frac{T_{H(i)}^{(k)} + T_{H(i-1)}^{(k)}}{\Delta z} \quad (15)$$

Теплота, вышедшая из элементарного объема насадки вследствие теплопроводности

$$Q_9 = \lambda_H s_H \Delta\tau \frac{T_{H(i+1)}^{(k)} + T_{H(i)}^{(k)}}{\Delta z} \quad (16)$$

Теплота, участвующая в теплообмене с воздухом

$$Q_{10} = -Q_5 \quad (17)$$

Здесь: c_H — теплоемкость материала насадки; ρ_H — плотность материала насадки; s_H — площадь поперечного сечения насадки; λ_H — теплопроводность материала насадки.

Уравнение теплового баланса для элементарного объема насадки имеет вид

$$Q_9 - Q_8 - Q_{10} = Q_6 - Q_7;$$

$$\frac{\left(T_{H(i+1)}^{(k)} - 2T_{H(i)}^{(k)} + T_{H(i-1)}^{(k)}\right)}{\Delta z} \lambda_H c_H \Delta\tau + \left(T_{H(i+1/2)}^{(k)} - T_{B(i+1/2)}^{(k)}\right) p\alpha\Delta z\Delta\tau = \quad (18)$$

$$= \left(T_{H(i+1/2)}^{(k)} - T_{H(i+1/2)}^{(k-1)}\right) c_H \rho_H s_H \Delta z$$

Если $\Delta z \to 0$ и $\Delta\tau \to 0$, то уравнение примет вид

$$\lambda_H c_H \frac{\partial^2 T_H}{\partial z^2} + p\alpha\left(T_H - T_B\right) + c_H \rho_H s_H \frac{T_H}{\partial\tau} = 0 \quad (19)$$

Для решения дифференциального уравнения (19) необходимо сформулировать краевые условия. В допущениях было принято, что насадка теплоизолирована, поэтому граничные условия можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial T_H}{\partial z}\right)_{z=0} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial T_H}{\partial z}\right)_{z=L} = 0 \,. \tag{20}$$

Начальное условие для уравнения (19) аналогично начальному условию для уравнения (10)

$$T_{H(\tau=0)} = T_{in} - \frac{\left(T_{in} - T_{out}\right)z}{L} \,. \tag{21}$$

Для решения дифференциального уравнения (10) необходимо знать коэффициент теплоотдачи α. Методика расчета коэффициента теплоотдачи была взята из литературного источника [1]

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{d_э}, \tag{22}$$

где $d_э$ — эквивалентный диаметр канала; λ – коэффициент теплопроводности воздуха; Nu – число Нуссельта.

В качестве определяющего размера используется эквивалентный диаметр

$$d_э = \frac{4f}{П}, \tag{23}$$

где f — площадь поперечного сечения канала; $П$ – смоченный периметр.

Для определения расчетного уравнения числа Нуссельта необходимо знать режим движения воздуха в канале насадки. Найдем число Рейнольдса по следующей зависимости

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d_э}{\eta}, \tag{24}$$

где ρ – плотность воздуха, $\rho = 1.2 кг/м^3$; υ – характерная скорость воздуха; η – динамическая вязкость воздуха, $\eta = 1.82 \cdot 10^{-5}\, Н \cdot с/м^2$.

Для ламинарного режима движения воздуха, когда число Рейнольдса лежит в пределах Re < 2 000. При таком режиме движения можно выделить вязкостной и вязкостно-гравитационный режимы. Они определяются через число Релея:

$$Ra = Gr \cdot \mathrm{Pr}\,, \tag{25}$$

где Gr — число Грасгофа, Pr — число Прандтля.

Число Прандтля для воздуха

$$\Pr = 0.713. \tag{26}$$

Число Грасгофа

$$Gr = \frac{g\beta d_э^3 (t_c - t_0)}{\nu^2}, \tag{27}$$

где g — ускорение свободного падения, g = 9,81 м/с²; t_c — температура поверхности теплообмена; t_0 — температура теплоносителя; β — температурный коэффициент объёмного расширения теплоносителя, ν — коэффициент кинематической вязкости.

$$\beta = \frac{1}{273 + t_0}. \tag{28}$$

При условии $Ra < 3 \cdot 10^5$ преобладает вязкостной режим и уравнения для числа Нуссельта имеет вид

$$Nu = 1.55(Pe \cdot d_{вн} / l)^{1/3} \varepsilon_l, \tag{29}$$

где Pe — число Пекле, l — длина трубы, ε_l — коэффициент, учитывающий изменение коэффициента теплоотдачи по длине трубы.

$$\varepsilon_l = 1 + 0.01\left(\frac{\mathrm{Re}}{l / d_{вн}}\right)^{2/3}. \tag{30}$$

При условии $Ra > 8 \cdot 10^5$ преобладает вязкостно-гравитационный режим и уравнение для числа Нуссельта имеет вид

$$\mathrm{Nu} = 0{,}15\mathrm{Pe}^{0{,}33}\mathrm{Ra}^{0{,}1}\varepsilon_l, \tag{31}$$

где Pe — число Пекле; Ra — число Релея; ε_l — поправочный коэффициент, учитывающий изменение коэффициента теплоотдачи по длине канала.

Число Пекле

$$Pe = \frac{C_p \rho \nu d_э}{\chi}, \tag{32}$$

где C_p — теплоемкость при постоянном давлении, $C_p = 1005 Дж / (кг \cdot К)$; χ — коэффициент теплопроводности воздуха, $\chi = 0{,}0257 Вт / (м \cdot К)$.

Для турбулентного режима движения теплоносителя, при числе Рейнольдса Re > 10 000 расчетное уравнение имеет вид

$$\mathrm{Nu} = 0{,}021\mathrm{Re}^{0{,}8}\Pr^{0{,}43}\varepsilon_l, \tag{33}$$

где Pr — число Прандтля.

При переходном движении воздуха 2 000 < Re < 10 000 используют уравнение для турбулентного режима, вводя в них поправочный множитель $\varepsilon_{пер}$, зависящий от значения числа Рейнольдса.

Таким образом, тепловой расчет процессов тепломассопереноса в канале регенеративного теплообменника сводится к совместному решению дифференциальных уравнений (10), (19) с краевыми условиями (11), (12) и (20), (21).

Для решения дифференциальных уравнений был применен метод разностных аналогов. Производные в уравнении (10) заменим на отношение конечных разностей. Для внутренних узлов применим интерполяцию по двум точкам, для крайнего узла применим интерполяцию по трем точкам. Это обеспечит одинаковую погрешность расчета. После подстановки в дифференциальное уравнение (10) получим уравнение для узлов пространственной и временной сеток. Подобным образом получаются уравнения для решения дифференциального уравнения (19).

Таким образом, расчет сводится к решению на каждом временном слое системы состоящей из (2n) линейных алгебраических уравнений.

В матричной форме система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$[\![A]\!]\vec{T}=\vec{b} \quad . \tag{34}$$

где $[\![A]\!]$ квадратная матрица коэффициентов размером $2n\times 2n$; $\vec{T}$ — вектор-столбец искомых температур размером 2n; $\vec{b}$ — вектор-столбец коэффициентов вычисляемых по результатам расчета предыдущего временного слоя размером 2n.

Матрица $[\![A]\!]$ является разреженной, число элементов отличных от нуля в любой ее строке не больше четырех. Полученная система уравнений решалась методом Гаусса с учетом разреженности матрицы. Интегралы, входящие в условие (1) решались по методу трапеций.

Коэффициент аккумуляции теплоты:

$$K_{ак}=T_{in}\tau_{ак}-\int_0^{\tau_{ак}}T_n^k\,d\tau\Big/\left(T_{in}-T_{out}\right)\tau_{ак} \quad . \tag{35}$$

Коэффициент регенерации теплоты:

$$K_{рег}=\int_0^{\tau_{рег}}T_n^k d\tau-T_{out}\tau_{рег}\,/\left(T_{in}-T_{out}\right)\tau_{рег} \quad . \tag{36}$$

Результатом построения модели была разработка программы в среде Visual Basic (Рис. 5). Для выполнения расчета необходимо задать геометрию насадки, теплофизические характеристики материала насадки и теплоносителя и параметры работы регенератора. Результатом расчета в программе являются коэффициент теплоотдачи и коэффициенты аккумуляции и регенерации, а также температурные поля по временным слоям. При описанных ранее допущениях коэффициенты регенерации и аккумуляции должны быть равны. Температурные поля по временным слоям показывают характер теплообмена в каждом сечении насадки. Эта программа будет полезна для изучения теплообмена в насадке и дальнейшего совершенствования конструкции регенеративного теплоутилизатора.

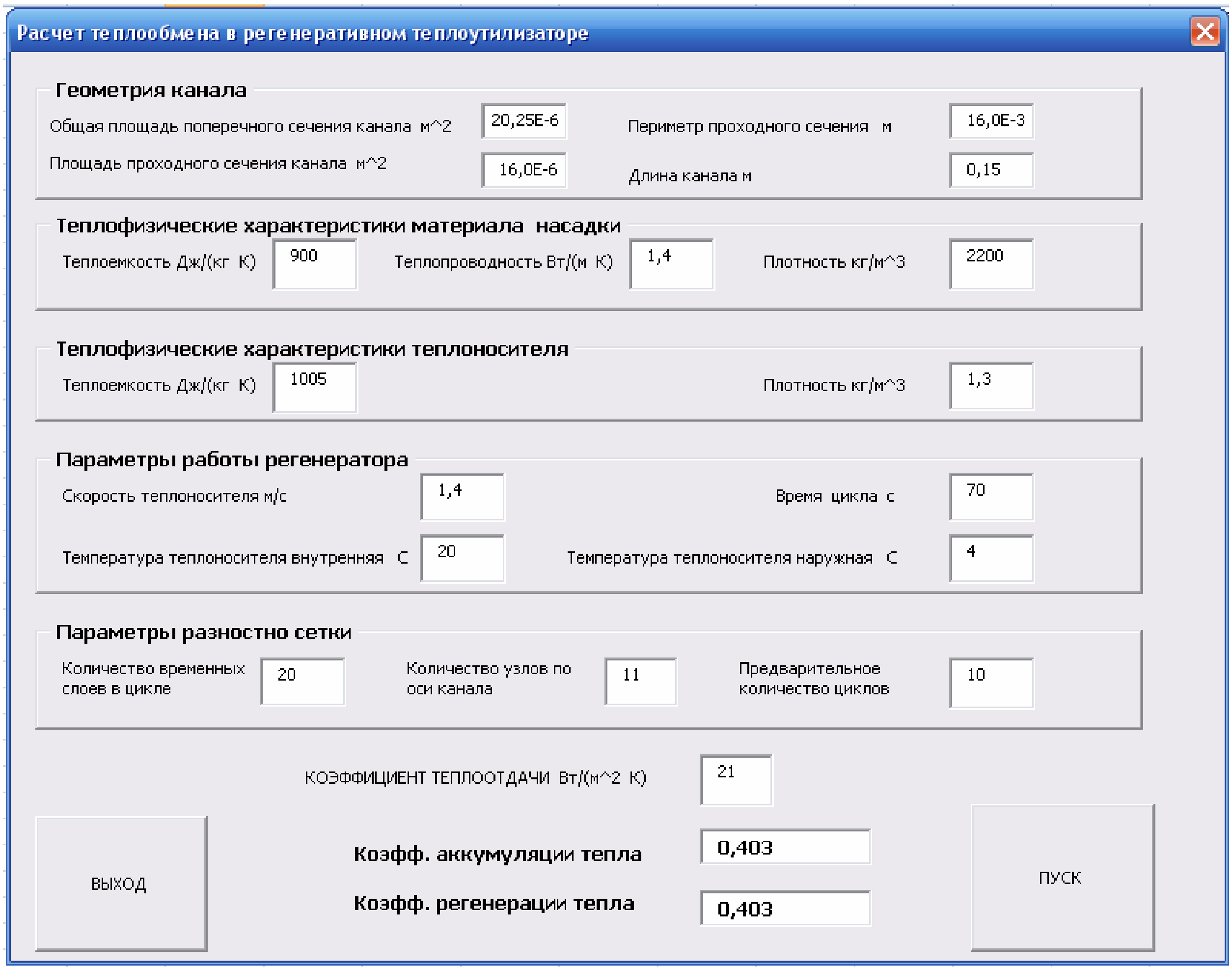

Рис. 5. Интерфейс программы расчета теплообмена в регенеративном теплоутилизаторе.

Список литературы

1. Бараненко А.В., Бухарин Н.Н., Пекарев В.И., Сакун И.А., Тимофеевский Л.С. Холодильные машины. – Санкт-Петербург, 1997.
2. Васильев В.А., Гаврилов А.И., Каменецкий К.К., Соболь Е.В. Параметрическое исследование регенеративного теплообменника.// Вестник МАХ, 2010, №1.

Mathematical model of a regenerative heat exchanger

Sobol E.V. john-stud-spb@mail.ru

St.-Petersburg State University of Refrigeration and Food Engineering

The present paper describes a mathematical model of a regenerative heat exchanger: there are developed dependences for determination of heat transfer coefficient, differential equations to calculate heat and mass transfer. A program module to solve equations and estimate regeneration and accumulation coefficients are shown.

Keywords: heat emission coefficient, heat emission processes, program module.