

Динамика кривошипно-ползунного механизма с зазорами в шатунных подшипниках

Кулаев Д.Х.

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

В настоящее время для определения неисправностей механизмов широко используются методы виброакустической диагностики. Точность методов определяется соотношением сигнал-шум. Увеличение этого соотношения может быть достигнуто выбором режима работы механизма при диагностике. В работе приведена динамическая модель кривошипно-ползунного механизма с зазорами в шатунных подшипниках, в виде системы дифференциальных уравнений, позволяющая выбирать наиболее информативный режим диагностики.

Ключевые слова: поршневая машина, кривошипно-ползунный механизм, диагностика, виброакустическая, режим работы, зазоры, динамика, скорость соударения.

При использовании систем виброакустической диагностики поршневых машин (двигателей внутреннего сгорания, поршневых компрессоров), возникает задача выбора наиболее информативных режимов диагностики, то есть режимов работы машины, при которых виброакустический сигнал, порождаемый неисправным узлом, существенно выделяется на фоне помех. Другими словами необходимо обеспечить режим работы машины при диагностике с повышенными скоростями соударения изношенных деталей.

Известен ряд работ по моделированию динамики кривошипно-ползунного механизма с зазорами в шатунных подшипниках на основе уравнений Лагранжа 2 рода [1,2]. Однако принятое в этих работах представление элементов кинематических пар цилиндрическими поверхностями не отражает реальной формы этих поверхностей при износе. Причем сложность полученных уравнений затрудняет учет реальной формы изношенных подшипников.

В данной работе предлагается более простая математическая модель кривошипно-ползунного механизма поршневой машины с зазорами в шатунных подшипниках, в которых профили изношенных вкладышей представлены в виде эллипсов.

1. Обозначения величин

1.1. R — радиус кривошипа, м;

1.2. λ — отношение длины кривошипа к длине шатуна;

1.3. $L = R/\lambda$ — длина шатуна, м;

1.4. L_1 — расстояние от центра нижней головки шатуна до центра масс шатуна, м;

- 1.5. $\Delta \max_1$ — максимальный зазор в верхнем шатунном подшипнике;
- 1.6. $\Delta \min_1$ — минимальный зазор в верхнем шатунном подшипнике, м;
- 1.7. d — диаметр пальца, м;
- 1.8. γ_1 — угол между большой осью эллипса верхнего шатунного подшипника и осью шатуна, рад;
- 1.9. $\Delta \max_2$ — максимальный зазор в нижнем шатунном подшипнике, м;
- 1.10. $\Delta \min_2$ — минимальный зазор в нижнем шатунном подшипнике, м;
- 1.11. D — диаметр шейки коленчатого вала, м;
- 1.12. γ_2 — угол между большой осью эллипса нижнего шатунного подшипника и осью шатуна, рад;
- 1.13. ε — степень сжатия;
- 1.14. p_a — давление в цилиндре на такте впуска, МПа;
- 1.15. p_z — максимальное давление в цилиндре, МПа;
- 1.16. p_b — давление в цилиндре на такте выпуска, МПа;
- 1.17. θ — угол поворота кривошипа, соответствующий участку максимального давления в цилиндре, рад;
- 1.18. n_1 — показатель политропы сжатия;
- 1.19. n_2 — показатель политропы расширения;
- 1.20. D_{Π} — диаметр поршня, м;
- 1.21. S_p — рабочий ход поршня, м;
- 1.22. m_2 — масса шатуна, кг;
- 1.23. m_3 — масса поршня, кг;
- 1.24. $J_{c2} = 0,175 \cdot m_2 \cdot L^2$ — момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через центр масс, кг/м²;
- 1.25. c_1, α_1, β_1 — показатели силового взаимодействия в верхнем шатунном подшипнике; здесь коэффициент, определяющий трение при деформации:

$$\beta_1 = 2 \cdot \mu \cdot 0,3 \cdot \sqrt{c_1 \cdot m_2 \cdot \frac{(L - L_1)}{L}} \text{ Н} \cdot \text{с/м};$$

- 1.26. c_2, α_2, β_2 — показатели силового взаимодействия в нижнем шатунном подшипнике; здесь коэффициент, определяющий трение при деформации:

$$\beta_2 = 2 \cdot \mu \cdot \sqrt{c_2 \cdot m_2 \cdot \frac{L_1}{L}} \text{ Н} \cdot \text{с/м};$$

- 1.27. f_{12} — коэффициент трения в нижнем шатунном подшипнике;
- 1.28. ω_1 — угловая скорость вращения кривошипа, рад/с.

2. Расчет силы давления газа

Сила давления газов определяется рабочим процессом поршневой машины. В качестве примера приведем формулы для двигателя внутреннего сгорания.

Условное расстояние между днищами поршня и головки цилиндров при положении КШМ в ВМТ, м

$$S_c = \frac{S_p}{\varepsilon - 1}$$

Перемещение поршня

$$S = R \cdot \left[1 - \cos(\alpha) + \lambda \cdot \frac{(1 - \cos(2 \cdot \alpha))}{4} \right]$$

Давление в цилиндре в конце такта сжатия

$$p_c = p_a \cdot \epsilon^{n_1}$$

Давление в цилиндре двигателя внутреннего сгорания

$$p = \begin{cases} \left[p_c + (p_z - p_c) \cdot \frac{S}{S\left(\frac{15 \cdot \pi}{180}\right)} \right] & \text{if } 0 \leq \alpha \leq \frac{15 \cdot \pi}{180} \\ p_z & \text{if } \left(\frac{15 \cdot \pi}{180}\right) < \alpha \leq \frac{15 \cdot \pi}{180} + \theta \\ \left[\frac{S_c + S \left[\left[\left(\frac{15 \cdot \pi}{180}\right) + \theta \right] \right] \right]^{n_2}}{S_c + S} \cdot p_z & \text{if } \left[\left(\frac{15 \cdot \pi}{180}\right) + \theta \right] < \alpha \leq 170 \cdot \frac{\pi}{180} \\ P_b & \text{if } \left(170 \cdot \frac{\pi}{180}\right) < \alpha \leq 2 \cdot \pi \\ P_a & \text{if } 2\pi < \alpha \leq 3\pi \\ \left[P_a \cdot \left[\frac{(S_c + S_p)^{n_1}}{S_c + S} \right] \right] & \text{if } 3\pi < \alpha \leq 4\pi \\ \left[P_c + (P_z - P_c) \cdot \frac{S}{S\left(4 \cdot \pi + 15 \cdot \frac{\pi}{180}\right)} \right] & \text{if } 4\pi < \alpha \leq 4\pi + \frac{15 \cdot \pi}{180} \\ P_z & \text{if } \left(\frac{15 \cdot \pi}{180}\right) + 4\pi < \alpha \leq \frac{15 \cdot \pi}{180} + \theta + 4\pi \\ \left[\frac{S_c + S \left[\left[\left(\frac{15 \cdot \pi}{180}\right) + \theta \right] \right] \right]^{n_2}}{S_c + S} \cdot P_z & \text{if } \left[\left(\frac{15 \cdot \pi}{180}\right) + \theta + 4\pi \right] < \alpha \leq \left(170 \cdot \frac{\pi}{180}\right) + 4\pi \end{cases}$$

Сила давления газа на поршень

$$P = \pi \cdot \frac{D_{II}^2 \cdot (p - 0,1) \cdot 10^6}{4}$$

3. Дифференциальные уравнения движения кривошипно-ползунного механизма с зазорами в шатунных подшипниках

Схема кривошипно-ползунного механизма с зазорами в шатунных подшипниках изображена на рис.1.

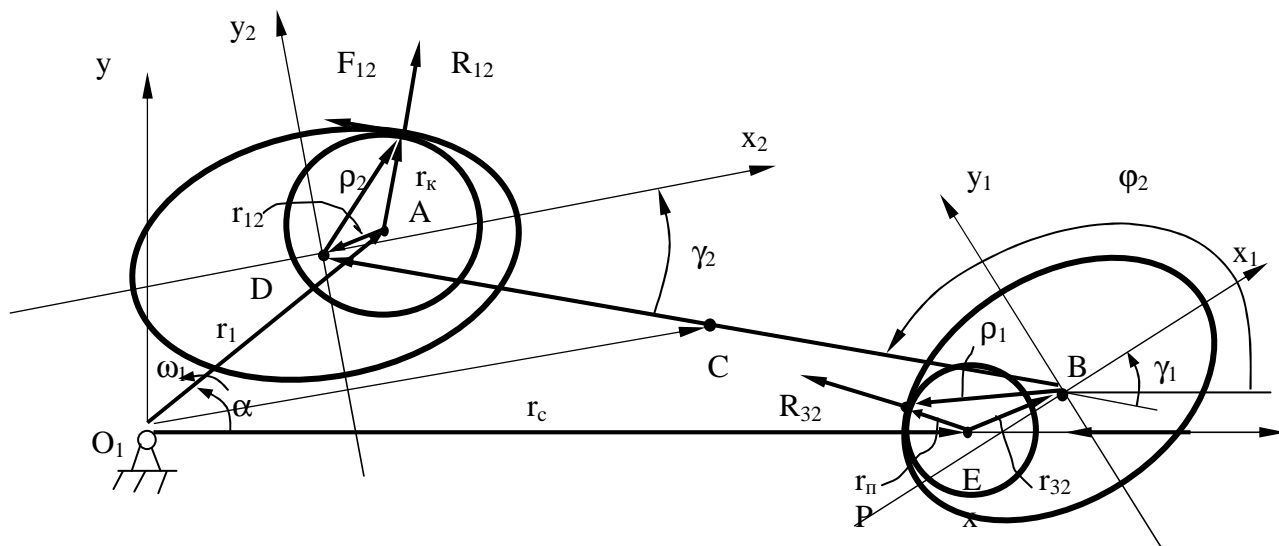


Рис.1. Схема кривошипно-ползунного механизма с зазорами в шатунных подшипниках.

На рис. 2 и 3 приведены схемы сочленений шатун-шейка коленчатого вала и шатун-палец соответственно.

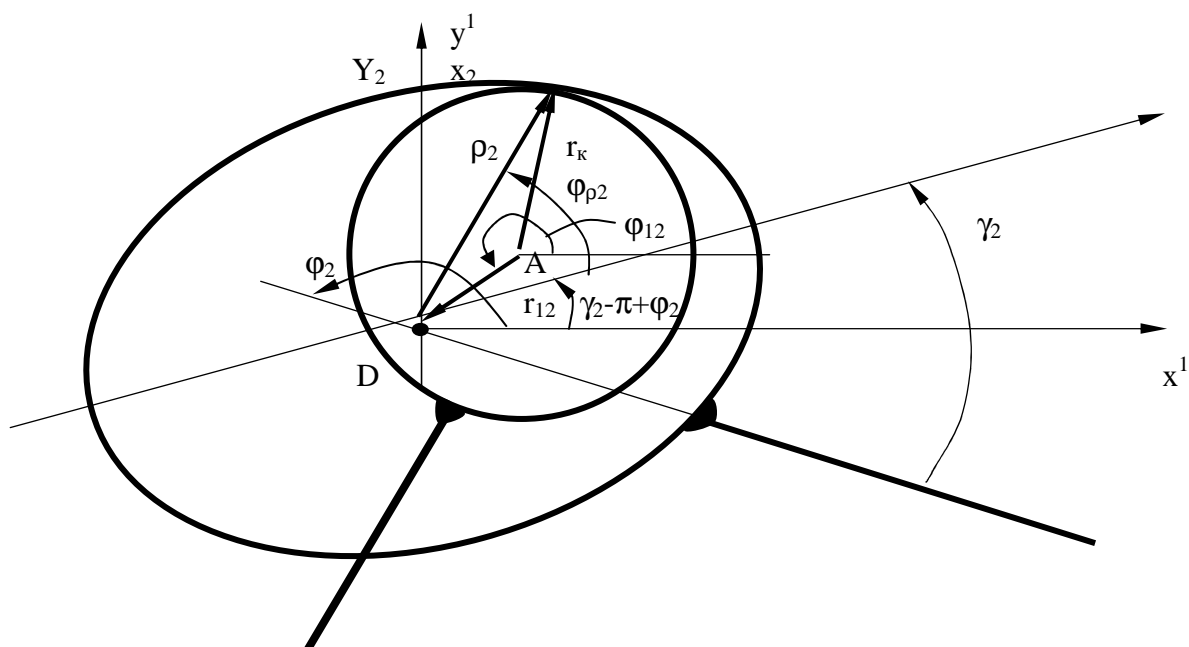


Рис. 2. Схема сочленения шатун-шейка коленчатого вала.

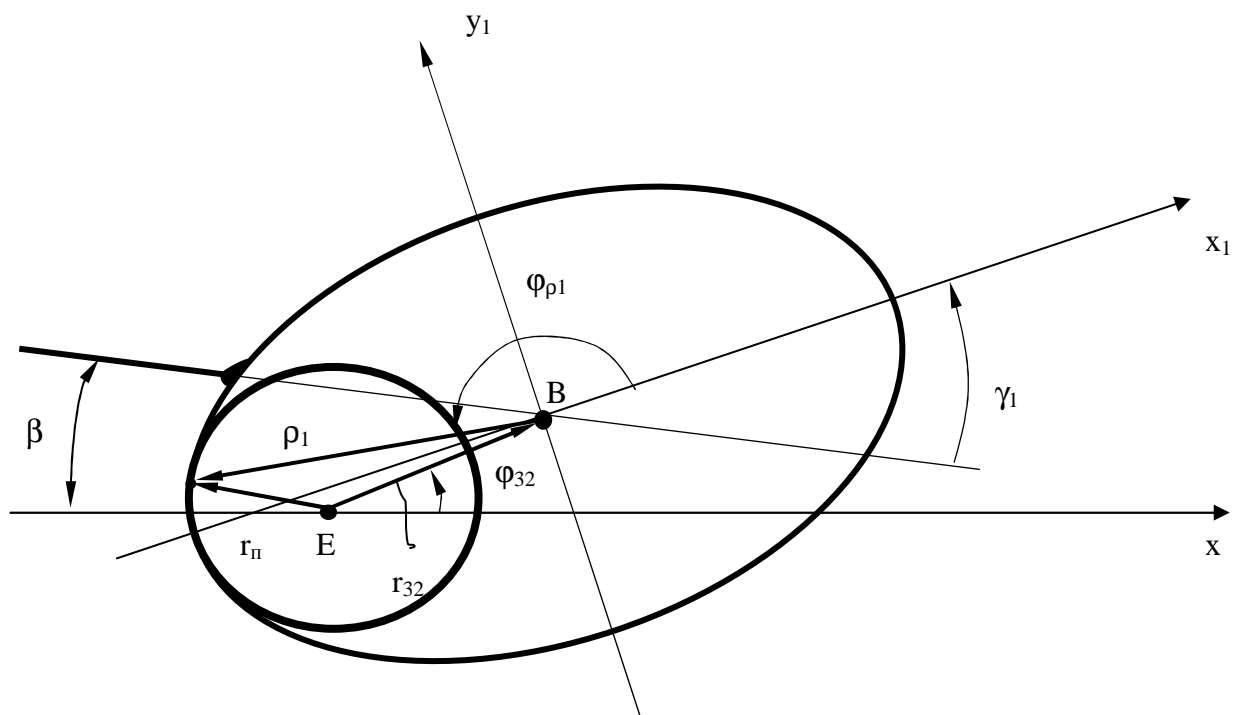


Рис.3. Схема сочленения шатун-палец.

Длина большой полуоси эллипса верхнего шатунного подшипника, м:

$$a_1 = \frac{(d + \Delta_{\max 1})}{2}.$$

Длина малой полуоси эллипса верхнего шатунного подшипника, м:

$$b_1 = \frac{(d + \Delta_{\min 1})}{2}.$$

Эксцентриситет эллипса верхнего шатунного подшипника:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a_1^2}}.$$

Длина большой полуоси эллипса нижнего шатунного подшипника, м:

$$a_2 = \frac{(D + \Delta_{\max 2})}{2}.$$

Длина малой полуоси эллипса нижнего шатунного подшипника, м:

$$b_2 = \frac{(D + \Delta_{\min 2})}{2}.$$

Эксцентриситет эллипса нижнего шатунного подшипника:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{a_2^2}}.$$

Для упрощения вывода дифференциальных уравнений движения механической системы с переменной структурой, разделим кривошипно-ползунный механизм на отдельные звенья, дополнив дифференциальные уравнения движения звеньев уравнениями силового взаимодействия. При этом предполагаем, что кривошип совершает равномерное вращение.

Система дифференциальных уравнений движения шатуна и поршня

$$m_2 \cdot \frac{d^2 x_c}{dt^2} = X_{12} + X_{23} + F_{12x};$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 y_c}{dt^2} = Y_{12} + Y_{23} + F_{12y};$$

$$J_{c2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum M_{iC};$$

$$m_3 \cdot \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -X_{23} - P.$$

Введем новую независимую переменную

$$\alpha = \bar{\omega}_1 \cdot t$$

$$y_0 = x_c; \quad y_1 = \frac{dx_c}{d\alpha}; \quad y_2 = y_c; \quad y_3 = \frac{dy_c}{d\alpha}; \quad y_4 = \varphi_2; \quad y_5 = \frac{d\varphi_2}{d\alpha}; \quad y_6 = x_3; \quad y_7 = \frac{dx_3}{d\alpha}.$$

Обозначим:

Относительные координаты звеньев:

$$x_{12} = y_0 - R \cdot \cos\alpha + L_1 \cdot \cos y_4;$$

$$y_{12} = (y_2 - R \cdot \sin\alpha) + L_1 \cdot \sin y_4;$$

$$x_{32} = y_0 - (L - L_1) \cdot \cos y_4 - y_6;$$

$$y_{32} = y_2 - (L - L_1) \cdot \sin y_4;$$

$$\phi_{12} = \arctg(x_{12}, y_{12});$$

$$\phi_{32} = \arctg(x_{32}, y_{32});$$

$$r_{12} = \sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2};$$

$$r_{32} = \sqrt{x_{32}^2 + y_{32}^2}.$$

Производные от относительных координат:

$$\dot{x}_{12} = (y_1 + R \cdot \sin\alpha - L_1 \cdot \sin y_4 \cdot y_5) \cdot \omega_1;$$

$$\dot{y}_{12} = ((y_3 - R \cdot \cos\alpha) + L_1 \cdot \cos y_4 \cdot y_5) \cdot \omega_1;$$

$$\dot{x}_{32} = (y_1 + (L - L_1) \cdot \sin y_4 \cdot y_5 - y_7) \cdot \omega_1;$$

$$\dot{y}_{32} = (y_3 - (L - L_1) \cdot \cos y_4 \cdot y_5) \cdot \omega_1;$$

$$r_{12}^{\bullet} = \frac{(x_{12} \cdot x_{12}^{\bullet} + y_{12} \cdot y_{12}^{\bullet})}{r_{12} + 10^{-25}};$$

$$r_{32}^{\bullet} = \frac{(x_{32} \cdot x_{32}^{\bullet} + y_{32} \cdot y_{32}^{\bullet})}{r_{32} + 10^{-25}}.$$

Относительные координаты точки контакта шипа и подшипника:

– для верхнего шатунного подшипника:

$$\phi_1 = \phi_{32} - \gamma_1 + 2 \cdot \pi - y_4;$$

$$p_1 = \frac{b_1}{\sqrt{1 - \cos(\phi_1)^2} \cdot \varepsilon_1^2}.$$

– для нижнего шатунного подшипника

$$\phi_2 = \phi_{12} - \gamma_2 - y_4;$$

$$p_2 = \frac{b_2}{\sqrt{1 - \cos(\phi_2)^2} \cdot \varepsilon_2^2}.$$

Производные от радиусов-векторов, определяющих точку контакта в подшипниках:

– верхнем

$$p_{1}^{\bullet} = \left[-b_1 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot \frac{\sin 2 \cdot \phi_1^{\bullet}}{2 \cdot (1 - \cos \phi_1^{\bullet})^2 \cdot \varepsilon_1^2} \right] \cdot \left[\frac{(x_{32} \cdot y_{32}^{\bullet} - x_{32}^{\bullet} \cdot y_{32})}{r_{32}^2 + 10^{-25}} - y_5 \cdot \omega_1 \right];$$

– нижнем

$$p_{2}^{\bullet} = \left[-b_2 \cdot \varepsilon_2^2 \cdot \frac{\sin 2 \cdot \phi_2^{\bullet}}{2 \cdot (1 - \cos \phi_2^{\bullet})^2 \cdot \varepsilon_2^2} \right] \cdot \left[\frac{(x_{12} \cdot y_{12}^{\bullet} - x_{12}^{\bullet} \cdot y_{12})}{r_{12}^2 + 10^{-25}} - y_5 \cdot \omega_1 \right].$$

Реакция в нижнем шатунном подшипнике:

$$R_{12} = \begin{cases} c_2 \cdot \left[\left(r_{12} + \frac{D}{2} \right) - p_2 \right]^{\alpha_2} + \beta_2 \cdot r_{12}^{\bullet} & \text{if } \left[\left(r_{12} + \frac{D}{2} \right) - p_2 \right] > 0; \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_{12} = R_{12} \cdot \frac{x_{12}}{r_{12} + 10^{-25}};$$

$$y_{12} = R_{12} \cdot \frac{y_{12}}{r_{12} + 10^{-25}}.$$

Реакция в верхнем шатунном подшипнике

$$R_{32} = \begin{cases} c_1 \cdot \left[\left(r_{32} + \frac{d}{2} \right) - p_1 \right]^{\alpha_1} + \beta_1 \cdot r_{32}^{\bullet} & \text{if } \left[\left(r_{32} + \frac{d}{2} \right) - p_1 \right] > 0; \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_{32} = R_{32} \cdot \frac{x_{32}}{r_{32} + 10^{-25}};$$

$$y_{32} = R_{32} \cdot \frac{y_{32}}{r_{32} + 10^{-25}}.$$

Сила трения в нижнем шатунном подшипнике:

$$F_{12} = f_{12} \cdot R_{12}.$$

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение звеньев кривошипно-ползунного механизма представлена в форме Коши:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = F$$

Матрица правых частей системы дифференциальных уравнений:

$$F = \begin{bmatrix} y_1 \\ (X_{12} + X_{32} + F_{12x}) \\ m_2 \cdot \omega_1^2 \\ y_3 \\ (Y_{12} + Y_{32} + F_{12y}) \\ m_2 \cdot \omega_1^2 \\ y_5 \\ \frac{[(X_{32} \cdot (L - L_1) - (X_{12} + F_{12x}) \cdot L_1] \cdot \sin y_4 + [(Y_{12} + F_{12y}) \cdot L_1 - Y_{32} \cdot (L - L_1)] \cdot \cos y_4 + F_{12} \cdot D / 2}{J_{c2} \cdot \omega_1^2} \\ y_7 \\ \frac{-(X_{32} + P)}{m_3 \cdot \omega_1^2} \end{bmatrix}.$$

Приближенное определение начальных условий в начале рабочего такта:

$$P_{i3} = m_3 \cdot R \cdot \omega_1^2 \cdot \left(1 + \frac{R}{L}\right);$$

$$P_{i2} = m_2 \cdot R \cdot \omega_1^2 \cdot \left(1 + 0,35 \cdot \frac{R}{L}\right);$$

$$\delta_1 = \left| \left[\frac{(P_{i3} - P(0))}{c_1} \right]^{\frac{1}{\alpha_1}} \right|;$$

$$\delta_2 = \left| \left[\frac{((P_{i3} + P_{i2}) - P(0))}{c_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2}} \right|.$$

Вектор начальных условий:

$$Y = \begin{pmatrix} \left[(L_1 + R) - \frac{\Delta_{\max 2}}{2} \right] - \delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ R \cdot \frac{(L - L_1)}{L} \\ \pi \\ \frac{-R}{L} \\ (L + R) - \left[\left[\left(\frac{\Delta_{\max 2}}{2} \right) + \delta_2 \right] + \left[\left(\frac{\Delta_{\max 1}}{2} \right) + \delta_1 \right] \right] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полученные дифференциальные уравнения могут быть численно решены с использованием специализированных программ, например, Mathcad.

Список литературы

1. Гриб В.В., Сафонов Б.П., Жуков Р.В. Динамика механизма движения поршневого компрессора с учетом зазоров в подвижных соединениях//Вестник машиностроения. 2002. № 4. С. 3-7.
2. Сергеев В.И., Юдин К.М. Исследование динамики плоских механизмов с зазорами. М.: Наука, 1974. 111с.

Dynamics of a slider-crank mechanism with conrod bearing clearances

D.Kh. Kulayev

Saint-Petersburg State University of Refrigeration & Food Engineering

Nowadays vibroacoustic diagnostics to detect mechanism damage is widely used. The signal-noise relation determines whether the method is adequate. This ratio can be augmented by appropriate selection of mode of operation of the mechanism when it is diagnosed. The paper realizes a dynamic model of a slider-crank mechanism with con-rod bearing clearances as a system of differential equations which allows selecting more informative condition of diagnostics.

Key words: piston machine, slider-crank mechanism, diagnostics, vibroacoustic, mode of operation, clearances, dynamics, impact rate.